数理解析研究所講究録
第 770 巻 1991 年 171-178

INFINITELY MANY SOLUTIONS OF NONLINEAR ELLIPTIC EQUATIONS WITH CRITICAL SOBOLEV EXPONENT

都立大 理学部　高桑 昇一郎 (SHOICHIRO TAKAKUWA)

1. INTRODUCTION

(M,g) を n 次元 compact Riemann 多様体とし、$n \geq 3$ とする。次の非線形固有値問題を考える。

$$L_g u := \kappa\Delta_g u + Ru = \lambda|u|^{2^*-2}u \qquad \text{in } M. \tag{1.1}$$

ここで、

$$\kappa = \frac{4(n-1)}{n-2} \qquad 2^* = \frac{2n}{n-2},$$

であり、Δ_g, R はそれぞれ (M,g) の負定値 Laplacian, scalar curvature を表す。また、楕円型作用素 L_g は (M,g) の conformal Laplacian と呼ばれる。

方程式 (1.1) は Yamabe [Y] によりはじめて導かれた。彼は正値関数 u が定数 λ とともに (1.1) を満たすことと、Riemann 計量 g の共形変形 $u^{2^*-2}g$ が constant scalar curvature をもつことが同値であることを示した。さらに、彼は (1.1) の解の存在を変分法により示そうとして次の汎関数を考えた。

$$Y(u) = E(u)/\|u\|_{2^*}^2 \qquad \text{for } u \not\equiv 0,$$

ここで

$$E(u) = \int_M (\kappa|\nabla u|^2 + Ru^2)\,dV, \qquad \|u\|_{2^*} = \left(\int_M |u|^{2^*} dV\right)^{1/2^*}.$$

である。任意の $u, \eta \in C^2(M)$, $u \not\equiv 0$ に対して、

$$\frac{d}{dt}Y(u+t\eta)\Big|_{t=0} = \frac{2}{\|u\|_{2^*}^2}\int_M \left(L_g u - \frac{E(u)}{\|u\|_{2^*}^{2^*}}|u|^{2^*-2}u\right)\eta\,dV,$$

が計算により導かれる。これより、$u \in C^2(M)$ が 汎関数 Y の critical point であることと u が $\lambda = E(u)/\|u\|_{2^*}^{2^*}$ とともに式 (1.1) を満たすことは同値であることがわかる。

はじめに、Y の最小値について考える。Hölder の不等式より、

$$Y(u) \geq -\|R\|_{n/2} > -\infty\,,$$

を得る。よって、汎関数 Y は下に有界となり、その最小値を

$$\lambda(M) = \inf\{\, Y(u) \mid u \in C^2(M), \quad u \not\equiv 0\,\},$$

とする。$\lambda(M)$ は共形不変量であり、Yamabe invariant と呼ばれる。Yamabe は任意の (M, g) に対して $\lambda(M)$ を与える正値関数の存在を示そうと試みた。その後、Trudinger [Tr] らの結果を経て、Aubin [A], Schoen [S1] により 汎関数 Y の positive minimizer の存在が示された。更に、Schoen [S3] は Y の (必ずしも minimizer とは限らない) positive critical point に対する一様な C^2 評価を得ている。しかし、non–minimizing solution の存在、非存在についての結果は S^n や $S^1 \times S^{n-1}$ のような特別な場合しか得られていない。

本稿では、汎関数 Y の (必ずしも正値とは限らない) non-minimizing critical point の存在問題を多様体 M に対する対称性の仮定のもとに考える。第 2 節では存在定理に必要な compact 性に関する結果を述べる。第 3 節において汎関数 Y の無限個の critical point の存在の結果について述べる。このとき、求めた critical point 全体は Sobolev 空間 $H^1(M)$ の非有界集合をなし、これは正値解に対する Schoen の結果 [S3] と対照的な事実を示している。最後に、第 4 節では Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の有界領域での Dirichlet 境界値問題に対しても同様の結果を述べる。

2. Compactness Theorem

$H^1(M) = H^{1,2}(M)$ を Sobolev 空間とする。Y は Hilbert 空間の開集合 $H^1(M)\backslash\{0\}$ 上で定義される C^2 級汎関数となる。この節では汎関数 Y に対する compact 性定理について考察する。

定義 2.1. 次が成り立つとき、汎関数 Y は Palais–Smale 条件を満たすという。

$$\text{(PS)}\qquad \begin{array}{l} \{u_j\} \subset H^1(M)\backslash\{0\} \text{ に対し} \\ \qquad \{Y(u_j)\} \text{ が有界で、} \qquad Y'(u_j) \longrightarrow 0 \quad \text{in } H^{-1}(M) \\ \text{ならば } \{u_j\} \text{ は } H^1(M) \text{ で強収束する部分列をもつ。} \end{array}$$

しかし、imbedding $H^1(M) \hookrightarrow L^{2^*}(M)$ が compact でないために、Y は Palais–Smale 条件を満たさない。そして、compact 性が破れるときには concentration または bubbling と呼ばれる現象が起きていることがわかっている。([Ta1] 参照)

この節では、対称性をもつ関数全体に制限したときの Sobolev imbedding の compact 性を考える。ここで対称性とは (M,g) の isometry からなる群によって定まるもの意味する。G を (M,g) の isometry から成る compact Lie 群とする。$H^1(M)$ の G– 不変な元全体の集合を X_G で表す。すなわち、

$$X_G = \left\{\, u \in H^1(M) \;\middle|\; u(gx) = u(x) \quad \forall g \in G\,, \quad \text{a.e.} x \in M \,\right\},$$

であり、X_G は $H^1(M)$ の閉部分空間であることは容易に示せる。。部分空間 X_G と 汎関数 Y の X_G への制限 $Y|X_G\backslash\{0\}$ に対して、次の compact 性定理が成り立つ。

定理 2.2. ([Ta2]) 群 G が条件

(G1) 任意の $x \in M$ に対し、x の orbit $G(x) = \left\{\, gx \;\middle|\; g \in G \,\right\}$ は無限集合となる。

を満たすとする。このとき、次が成り立つ。

(1) imbedding $X_G \hookrightarrow L^{2^*}(M)$ は compact である。

(2) Y の X_G への制限 $Y|X_G\backslash\{0\} : X_G\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ は Palais–Smale 条件を満たす。

3. EXISTENCE THEOREM

$G \subset Isom(M)$ を条件 (G1) を満たす compact Lie 群とする。定理 2.2 と Ambrosetti–Rabinowitz の mountain–pass theorem を用いて次の定理を得る。

定理 3.1. ([AR], [R])
(M,g) は正値 scalar 曲率 R をもつとする。G が条件 (G1) と条件

$$\text{(G2)} \qquad \dim X_G = +\infty\,,$$

を満たすとする。このとき、$Y|X_G\backslash\{0\}$ の critical point の列 $\{u_j\} \subset X_G\backslash\{0\}$ で $Y(u_j) \longrightarrow \infty$ as $j \to \infty$ となるものが存在する。

Palais の symmetric criticality principle [P] より、定理 3.1 で求めた u_j は Y の critical point になる。よって、u_j は方程式

$$L_g u = \lambda_j |u|^{2^*-2} u \quad \text{in } M \qquad \text{where } \lambda_j = E(u_j)/\|u_j\|_{2^*}^{2^*}\,,$$

の弱解となる。Trudinger の正則性定理 [Tr] より、u_j は C^2 となる。以上より、次の定理が得られる。

定理 3.2. ([Ta2])
(M,g) を正値 scalar 曲率をもつ n 次元 compact Riemann 多様体とし、$n \geq 3$ とする。$G \subset Isom(M)$ を条件 (G1), (G2) を満たす compact Lie 群とする。このとき、C^2 関数の列 $\{u_j\}_{j=0}^{\infty}$ が存在して次の (1)–(3) が成り立つ。

(1) u_j は $\lambda_j = E(u_j)/\|u_j\|_{2^*}^{2^*}$ とともに方程式 (1.1) を満たす。
(2) u_j は G– 不変である。
(3) $Y(u_j) \longrightarrow \infty$ as $j \to \infty$.
(4) u_0 は正値であり、X_G における汎関数 Y の最小値を与える。

注意 3.3.

(1) 条件 (G2) は群 G の作用が推移的 (transitive) でないことと同値である。また、条件 (G2) が成り立つときには G は不動点をもたないことは明らかである。
(2) u_0 に対して Riemann 計量 $u_0^{4/(n-2)} g$ は Yamabe の問題の解を与えている。

例 3.4. M を単位球面とする。このとき、$Isom(M) = O(n+1)$ である。$G = O(k_1) \times \cdots \times O(k_m)$, $k_1, \cdots, k_m$ は 2 以上の整数で $k_1 + \cdots + k_m = n+1$ とすると G は条件 (G1), (G2) を満たす。よって、定理 3.2 より無限個の G– 不変な Y の critical point が存在する。$m = 2$ の場合にはこの結果は Ding ([D]) により得られている。一方、Obata ([O]) の結果より Y の positive critical point は minimizer に限られる。これより、定理 3.2 で求めた全ての non-constant critical point は符号を変えることがわかる。

例 3.5. $M = S^1(T) \times S^{n-1} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+2}$ ($T > 0$),

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & B \end{pmatrix} \;\middle|\; B \in O(n) \right\} \cong O(n),$$

とする。G は (G1), (G2) を満たし、Y は無限個の critical point をもつ。Schoen [S2] は Gidas–Ni–Nirenberg の対称性定理 [GNN], [CGS] を用いて Y の positive critical point はすべて G– 不変であることを示した。さらに、Schoen は 方程式 (1.1) より導かれる $t \in S^1(T)$ に対する常微分方程式を解析することによって、parameter T ごとに Y のすべての positive critical point を数えあげている。また、

$$G' = \left\{ A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & I_n \end{pmatrix} \;\middle|\; B \in SO(2) \right\} \cong SO(2) \cong S^1,$$

も条件 (G1), (G2) を満たしている。よって、定理 3.2 より G'– 不変な無限個の critical point が存在する。Schoen の結果より minimizer u_0 (実は定数) を除いたすべての critical point は符号を変えることがわかる。

最近、Schoen [S3] により次の定理が示された。

定理 3.6. (M, g) は compact Riemann 多様体で球面と共形的に同値でないとする。このとき、計量 g のみによる正数 Λ が存在し次が成り立つ。

$$Y \text{ の任意の critical point } u \text{ に対して } \|u\|_{C^2} \le \Lambda, \quad \min_M u \ge \Lambda.$$

この定理より一般に次が成り立つ。

命題 3.7 $\{u_j\}$ を定理 3.2 で求めた critical point の列とすると、有限個の j を除いて u_j はすべて符号を変える。

4. BOUNDARY VALUE PROBLEM

Ω を $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) の滑らかな境界をもつ有界領域とする。次の非線形固有値問題を考える。

問題 II. 次を満たす関数 u と定数 λ を求めよ。

$$
\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{2^*-2} u & \text{in} \quad \Omega\,, \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{4.1}
$$

Sobolev 空間の開集合 $H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ 上の汎関数 F を

$$
F(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \; / \; \Big(\int_\Omega |u|^{2^*} \, dx\Big)^{2/2^*} .
$$

で定義する。いま、u を F の critical point とすると、u は式

$$
-\Delta u = l(u)|u|^{2^*-2} u\,,
$$

を満たすことが第 1 節と同様にしてわかる。ここで、$l(u) = \|\nabla u\|_2^2 / \|u\|_{2^*}^2$ である。これより、問題 II の解は汎関数 F の critical point として特徴付けられる。

いま、前節と同じ状況を考える。$G \subset O(n)$ を compact Lie 群とし、領域 Ω は G の作用に対して不変であると仮定する。

$$
X_G = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \;\middle|\; u(gx) = u(x) \qquad \forall g \in G\,, \qquad \text{a.e. } x \in M \right\},
$$

とおく。このとき、前節と同様の次の定理が得られる。

定理 4.1. ([Ta2])
compact Lie 群 $G \subset O(n)$ は条件 (G1) を満たすとする。このとき、C^2 関数の列 $\{u_j\}$ で次の (1)–(3) を満たすものが存在する。

(1) u_j は (4.1) の解である。
(2) u_j は G– 不変である。
(3) $\|u_j\|_{H_0^1} \longrightarrow \infty \quad \text{as} \quad j \to \infty$.

注意 4.2.

(1) 前節とは異なり、この場合には条件 (G2) はつねに成り立つ。
(2) Fortunato–Jannelli [FJ] は特別な Ω に対して $n \geq 4$ の場合に同様の結果を得ている。彼らの結果は定理 4.1 において $G = S^1 = SO(2)$ の場合に対応する。

最後に境界値問題 II の G– 不変な正値解の存在について次の結果を得る。

定理 4.3. ([T2])
compact Lie 群 $G \subset O(n)$ は条件 (G1) を満たすとする。このとき、$u \in C^\infty(\overline{\Omega}) \cap X_G$ が存在して以下を満たす。

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ F(u) = \inf\{\, F(v) \mid v \in X_G \backslash \{0\} \,\}. \end{cases}$$

注意 4.4.

(1) S を imbedding $H_0^1 \hookrightarrow L^{2^*}$ に対する Sobolev の不等式の best constant とすると F の最小値は S^{-1} であることが容易に示される。しかし、Pohozaev [Po] の結果より Ω が有界領域のときには F の minimizer は存在しないことが知られている。よって、定理 4.3 で求めた u は non–minimizing positive critical point であることがわかる。

(2) この定理で求められた u は Bahri–Coron [BC] により、背理法を用いて存在が示された (4.1) の正値解を与えている。

References

[AR] A. Ambrosetti and P. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. **14** (1973), 349–381.

[A] T. Aubin, *Équations différentielles non linéares et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pures Appl. **55** (1976), 269–296.

[BC] A. Bahri and J. M. Coron, *On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent : the effect of the topology of the domain*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), 253–2294.

[CGS] L. Caffarelli , B. Gidas and J. Spruck, *Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), 271–297.

[D] W.–Y. Ding, *On conformally invariant elliptic equation on* $\mathbb{R}^n$, Comm. Math. Phys. **107** (1986), 331–335.

[FJ] D. Fortunato and E. Jannelli, *Infinitely many solutions for some nonlinear elliptic problems in symmetric domain*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **105A** (1987), 205–213.

[GNN] B. Gidas, W.-M. Ni and L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. **68** (1979), 209–243.

[LP] J. M. Lee and T. M. Parker, *The Yamabe problem*, Bull. Amer. Math. Soc. **17** (1987), 37–91.

[O] M. Obata, *The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. **6** (1972), 247–258.

[Pa] R. Palais, *The principle of symmetric criticality*, Comm. Math. Phys. **69** (1979), 19–30.

[Po] S. Pohozaev, *Eigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Soviet Math. Dokl. **6** (1965), 1408–1411.

[R] P. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, regional conference in math. no. 65, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1986.

[S1] R. Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Diff. Geom. **20** (1984), 479–495.

[S2] ——, *Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics*, Springer Lecture Notes in Math. **1365**, 120–154.

[S3] ——, *On the number of constant scalar curvature metrics in a conformal class*, preprint.

[Ta1] S. Takakuwa, *Behavior of minimizing sequences for the Yamabe problem*, Tokyo Metropolitan University Mathematics Preprint Series No. 7.

[Ta2] ——, in preparation.

[Tr] N. S. Trudinger, *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **22** (1968), 265–274.

[Y] H. Yamabe, *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Math. J. **12** (1960), 21–37.